Author: Visse, H.D.

Title: Counting points on K3 surfaces and other arithmetic-geometric objects

Issue Date: 2018-12-18

Stellingen

behorende bij het proefschrift

Counting points on K3 surfaces and other arithmetic-geometric objects

1. Wanneer men met behulp van de cirkelmethode rationale punten tot begrensde hoogte B op een diagonaal kwartisch oppervlak over $\mathbb{Q}$ met Picard rang ρ telt, dan dragen de hoofdbogen een orde van grootte $(\log B)^\rho$ bij.

2. In de cirkelmethodeberekening hierboven draagt de singuliere rij $\rho - 1$ logaritmische factoren bij, terwijl de singuliere integraal de laatste logaritme bijdraagt.

3. Zijn $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_{n-1}]$ homogene vormen van gelijke en even, positieve graad d. Beschouw onder de voorwaarden uit hoofdstuk 3 van dit proefschrift de kegelsnedebundel ϕ gedefiniëerd via

$$\begin{aligned} x_0^2 + x_1^2 =& f_1(t_0, \dots, t_{n-1}) x_2^2, \\ & f_2(t_0, \dots, t_{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

   over het hyperoppervlak gegeven door $f_2(t_0, \dots, t_{n-1}) = 0$. Er bestaat een constante c_ϕ zodanig dat het aantal rationale punten in de basis met hoogte ten hoogste B, waarover de vezel rationale punten heeft, gelijk is aan $c_\phi B^{n-d} (\log B)^{-1/2}$ op een foutterm met een kleine logaritmische besparing na.

4. Als voor elke plaats v van $\mathbb{Q}$ de hierboven beschreven kegelsnedebundel een gladde vezel heeft met een $\mathbb{Q}_v$-punt, dan is de constante c_ϕ positief.

5. Voor alle $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, $H \in \mathbb{R}$ en $\delta \in \mathbb{Z}_{>0}$, is er een getal $C(d, H, \delta)$ met de volgende eigenschap. Voor elke kromme van geslacht 2 over een getallenlichaam van graad d, waarvoor de Faltingshoogte van de Jacobiaan ten hoogste H is en waarvoor de discriminant van het Néron–Severi-rooster van het geassocieerde Kummeroppervlak X gelijk is aan δ, is de orde van de Brauergroep $\mathrm{Br}(X)$ van boven begrensd door $C(d, H, \delta)$.

6. Zij C een kromme van geslacht 2 over $\mathbb{Q}$ waarvoor het geassocieerde Kummeroppervlak X meetkundig Picardgetal gelijk aan 17 heeft. Dan factoriseert de Galoiswerking op $\mathrm{NS}\,\overline{X}$ via een ondergroep van S_6. Op conjugatie na zijn er slechts vier ondergroepen H van S_6 waarvoor $\mathrm{H}^1(H, \mathrm{NS}\,\overline{X})$ niet triviaal is. In elk van deze gevallen is de cohomologiegroep van orde 2.

7. Zij X het gladde projectieve oppervlak gegeven door het polynoom $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 3x_4^4$, en voor ieder priemgetal p waarvoor de reductie X_p glad is, zij T_p het spoor van Frobenius werkend op $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\overline{X_p}, \mathbb{Q}_\ell(1))$. Dan divergeert de som $\sum_{p \le x} \frac{|T_p| - T_p}{p}$ voor $x \to \infty$.

8. Het Nakai–Moishezon criterium voor het ampel zijn van een divisor D op een oppervlak S eist dat zowel de zelfdoorsnijding D^2 als het doorsnijdingsgetal $D \cdot C$ voor iedere kromme $C \subset S$ positief zijn. In geval S een K3-oppervlak over $\mathbb{C}$ is, kan men dit verzwakken door ofwel (a) de eis op D^2 weg te laten, ofwel (b) slechts $D \cdot C > 0$ te testen voor alle (-2)-krommen en tevens te eisen dat D een ampele divisor positief doorsnijdt; echter niet allebei.

9. De evident onjuiste formule $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -\frac{1}{12}$ toont gelijktijdig het nut aan van precisie en slordigheid.

10. De wiskunde is gebaat bij een uitgebreider vocabulair en beter proza. Het gebruik van het woord 'waarmaken' in de betekenis van 'waar maken' is een goede eerste stap.

11. Gegeven de vele voorbeelden van wiskundig onderzochte economische situaties waarbij milde regulering wenselijke oplossingen geeft, is het opzienbarend dat volgens de publieke opinie rechts politiek gedachtengoed de economie ten goede zou komen.

12. De sociale sfeer in een wetenschappelijk instituut kan de levens van wetenschappelijk personeel veel verder beïnvloeden dan louter het doen ontstaan van een inspirerende werkomgeving.

Propositions

accompanying the thesis

Counting points on K3 surfaces and other arithmetic-geometric objects

1. For a diagonal quartic surface over $\mathbb{Q}$ with Picard rank ρ, when counting rational points up to bounded height B using the circle method, the major arcs contribute an order of magnitude $(\log B)^\rho$.

2. In the circle method calculation above, the singular series contributes $\rho-1$ logarithmic factors, while the singular integral contributes the last logarithm.

3. Let $f_1, f_2 \in \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_{n-1}]$ be homogeneous forms of equal and even positive degree d subject to some assumptions as lined out in Chapter 3 of the thesis. Consider the conic bundle ϕ defined via

$$\begin{aligned} x_0^2 + x_1^2 =& f_1(t_0, \dots, t_{n-1}) x_2^2, \\ & f_2(t_0, \dots, t_{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

over the hypersurface defined by $f_2(t_0, \dots, t_{n-1}) = 0$. There exists a constant c_ϕ such that the number of rational points of bounded height B in the base, over which the fibre has rational points, equals $c_\phi B^{n-d} (\log B)^{-1/2}$ up to an error term with a small logarithmic saving.

4. If for every place v of $\mathbb{Q}$ the conic bundle described above has a smooth fibre with a $\mathbb{Q}_v$-point, then the constant c_ϕ is positive.

5. For all $d \in \mathbb{Z}_{>0}$, $H \in \mathbb{R}$ and $\delta \in \mathbb{Z}_{>0}$, there is a number $C(d, H, \delta)$ with the following property. For any curve of genus 2 over a number field of degree d, having a Jacobian with Faltings height $h \leq H$ and associated Kummer surface X with discriminant of its Néron–Severi lattice δ, the order of the Brauer group $\mathrm{Br}(X)$ is bounded above by $C(d, H, \delta)$.

6. Let C be a curve of genus 2 over $\mathbb{Q}$ with associated Kummer surface X having geometric Picard rank equal to 17. Then the Galois action on $\mathrm{NS}\,\overline{X}$ factorizes via a subgroup of S_6. Up to conjugation there are only four subgroups H of S_6 for which $\mathrm{H}^1(H, \mathrm{NS}\,\overline{X})$ is non-trivial. In each of these cases the cohomology group is of order 2.

7. Let X be the smooth projective surface defined by the polynomial $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 3x_4^4$, and for any prime number p for which the reduction X_p is smooth, let T_p be the trace of Frobenius acting on $\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(\overline{X_p}, \mathbb{Q}_\ell(1))$. Then the sum $\sum_{p \leq x} \frac{|T_p| - T_p}{p}$ diverges for $x \to \infty$.

8. The Nakai–Moishezon criterion for ampleness of a divisor D on a surface S asks both the self-intersection D^2 and the intersection $D \cdot C$ with every curve $C \subset S$ to be positive. If S is a K3 surface over $\mathbb{C}$, one may weaken this by either (a) leaving out the requirement on D^2, or (b) only testing $D \cdot C > 0$ for every (-2)-curve C and further requiring D to intersect some ample divisor positively; but not both.

9. The obviously wrong formula $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -\frac{1}{12}$ simultaneously shows the use of preciseness and sloppiness.

10. The mathematical community merits from a wider vocabulary and better prose. Using the word 'to validate' in the sense of 'to make true' is a good first step.

11. Given the many examples of mathematically studied economic situations where mild regulations yield preferable solutions, it is remarkable that in the public mind rightwing political thinking should be beneficial to the economy.

12. The social atmosphere in a scientific department may influence researchers' lives far beyond the creation of an inspiring working environment.