

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/43186> holds various files of this Leiden University dissertation.

Author: Derickx, M.

Title: Torsion points on elliptic curves over number fields of small degree

Issue Date: 2016-09-21

Samenvatting

Een Pythagorees drietal, vernoemd naar de stelling van Pythagoras, is een drietal van gehele getallen a, b, c zodanig dat $a^2 + b^2 = c^2$. Een voorbeeld van een dergelijk drietal is $3^2 + 4^2 = 5^2$. Dit voorbeeld samen met andere Pythagorese drietallen zijn al te vinden op Babylonische kleitabletten van wiskundige aard stammend uit de periode rond 1800 v.C. Dit voorbeeld illustreert dat mensen al sinds de oudheid geïnteresseerd waren in de vraag of een kwadraat geschreven kan worden als som van kwadraten. Als men het niet erg vindt met breuken te werken in plaats van met gehele getallen kan met de vergelijking $a^2 + b^2 = c^2$ ook herschrijven tot $y^2 = x^2 + 1$, met $y = \frac{c}{a}$ en $x = \frac{b}{a}$ en word de vraag dus wanneer is een kwadraat van de vorm van een kwadadraat $+ 1$. Als men het kwadratische polynoom $x^2 + 1$ door een derdegraads polynoom zoals $x^3 + 2x + 2$ vervangt, beland men in de wereld van Elliptische krommen waar dit proefschrift over gaat.

Het is een stelling van Barry Mazur die zegt dat als a en b breuken zijn, dat dan de verzameling van oplossingen (x, y) van $y^2 = x^3 + ax + b$ met x en y breuken, of hooguit 15 elementen bevat of oneindig groot is.

In dit proefschrift word er gekeken naar hoeveel oplossingen (x, y) de vergelijking $y^2 = x^3 + ax + b$ kan hebben als we iets algemener a, b, x, y algebraïsche getallen van kleine graad laten zijn. Een voorbeeld van een algebraïsch getal van graad twee is $\sqrt{3} + 1$.

Hoofdstuk 1 is een inleidend hoofdstuk bedoeld voor voornamelijk Master en Ph.D. studenten in de wiskunde om de rest van dit proefschrift beter begrijpbaar te maken voor hen. De rest van dit proefschrift bestaat uit artikelen.

Hoofdstuk 2 is een artikel dat gepubliceerd is in Journal of Algebra en is samen met Mark van Hoeij geschreven. In dit hoofdstuk ontwikkelen we een strategie voor het uitrekenen van gonaliteiten van modulaire krommen, ook laten we zien wat voor een gevolgen de uitkomst van deze berekeningen heeft voor het aantal oplossingen van $y^2 = x^3 + ax + b$ in x en y over getallenlichamen van graad ≤ 8 .

Chapter 3 is een artikel dat voorkomt uit een samenwerking tussen Sheldon Kamienny, William Stein, Michael Stoll en mij. Dit is nog niet gepubliceerd maar zal zeer binnenkort opgestuurd worden ter publicatie. In dit hoofdstuk worden de priemmen bepaald die 1 plus het aantal oplossingen van aantal oplossingen in x en y van $y^2 = x^3 + ax + b$ kunnen delen. Dit word gedaan voor x, y, a, b in getallenlichamen van graad ≤ 6 .

Het laatste hoofdstuk is een artikel dat zal verschijnen in een herdeking's uitgave ter ere van Fumiyuki Momose. De co-auteurs zijn Barry Mazur and Sheldon Kamienny. In dit hoofdstuk word heel expliciet bestudeerd wanneer de vergelijking $y^2 = x^3 + ax + b$ precies 16 oplossingen heeft in x, y over een getallenlichaam van graad 4.