Author: Kilicer, P.
Title: The CM class number one problem for curves
Issue Date: 2016-07-05

Samenvatting

Zij E een elliptische kromme over $\mathbb{C}$ met *complexe vermenigvuldiging (CM)* over de ring van gehelen $\mathcal{O}_K$ van een imaginair kwadratisch lichaam K. Dan stelt de eerste hoofdstelling van de theorie van complexe vermenigvuldiging van elliptische krommen dat de lichaamsuitbreiding $K(j(E))$, verkregen door het adjungeren van de j-invariant van E aan K, het *Hilbertklasselichaam* van K is, zie [11, Theorem 11.1]. Als E gedefinieerd is over $\mathbb{Q}$, dan is $K(j(E))$ gelijk aan K, wat impliceert dat de klassegroep Cl_K triviaal is.

We kunnen ons afvragen voor welke imaginaire kwadratische lichamen K de corresponderende elliptische kromme met CM over $\mathcal{O}_K$ gedefinieerd is over $\mathbb{Q}$. Dit is equivalent met het vinden van alle imaginaire kwadratische lichamen met triviale klassegroep, wat bekend is als het klassegetal-één-probleem van Gauss. Dit probleem is opgelost door Heegner in 1952 [16], door Baker in 1967 [2] en door Stark in 1967 [41]; de imaginaire kwadratische lichamen van klassegetal één zijn de lichamen $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ met $d \in \{3, 4, 7, 8, 11, 19, 43, 67, 163\}$.

In de jaren ’50 hebben Shimura en Taniyama [39] de eerste hoofdstelling van de theorie van complexe vermenigvuldiging van elliptische krommen gegeneraliseerd naar *abelse variëteiten*. Een abelse variëteit A van geslacht g heeft CM als de endomorfismering van A een orde bevat in een *CM-lichaam* van graad $2g$. Zij K een CM-lichaam van graad $2g$ met maximale orde $\mathcal{O}_K$ en zij Φ een CM type van K. Zij A een gepolariseerde simpele abelse variëteit over $\mathbb{C}$ van dimensie g met CM over $\mathcal{O}_K$. Dan stelt de eerste hoofdstelling van complexe vermenigvuldiging voor abelse variëteiten dat het lichaam van moduli M van de gepolariseerde simpele abelse variëteit A een onvertakt klasselichaam H over het *reflexlichaam* K^r van K geeft. Het klasselichaam H correspondeert met de ideaalgroep $I_0(\Phi^r)$ (zie pagina 17) die alleen afhankelijk is van (K, Φ), zie Stelling 1.5.6. Merk op dat de eerste hoofdstelling van de complexe vermenigvuldiging impliceert dat als de gepolariseerde simpele abelse variëteit A gedefinieerd is over K^r, dat dan de *CM-klassegroep* $I_{K^r}/I_0(\Phi^r)$ triviaal is.

Analoog aan het elliptischekrommengeval, vragen we ons af voor welke CM-paren (K, Φ) de corresponderende CM abelse variëteit gedefinieerd is over K^r. Anders gezegd, voor welke CM-paren (K, Φ) is de *CM-klassegroep* $I_{K^r}/I_0(\Phi^r)$ triviaal. In dit proefschrift geven we een antwoord op dit probleem voor vierdegraads CM-lichamen (zie hoofdstuk 2) en voor zesdegraads CM-lichamen die een imaginair kwadratisch lichaam bevatten (zie hoofdstuk 3).

Verder vragen we ons af voor welke CM-lichamen de corresponderende CM abelse variëteiten lichaam van moduli gelijk aan $\mathbb{Q}$ hebben. Murabayashi en Umegaki [31] hebben de vierdegraads CM-lichamen bepaald die corresponderen met een simpel CM abels oppervlak met lichaam van moduli gelijk aan $\mathbb{Q}$. In hoofdstuk 4 bepalen wij de zesdegraads CM-lichamen die corresponderen met een simpele CM abelse variëteit van dimensie 3 met lichaam van moduli gelijk aan $\mathbb{Q}$.