Author: Kilicer, P.
Title: The CM class number one problem for curves
Issue Date: 2016-07-06

Résumé

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ ayant multiplication complexe (CM) par l'ordre maximal $\mathcal{O}_K$ d'un corps quadratique imaginaire K. Le premier théorème principal de la multiplication complexe affirme que le corps $K(j(E))$, obtenu en adjoignant à K le j-invariant de E, est égal au *corps de classes de Hilbert* de K, confer Cox [11, Theorem 11.1]. Notons que lorsque E est définie sur $\mathbb{Q}$, le corps de classes de Hilbert $K(j(E))$ est égal à K et le groupe des classes Cl_K est trivial.

Se pose alors le problème de déterminer les corps quadratiques totalement imaginaires K pour lesquels la courbe elliptique à multiplication complexe par $\mathcal{O}_K$ correspondante est définie sur $\mathbb{Q}$. De façon équivalente, il s'agit de trouver tous les corps quadratiques imaginaires dont le groupe des classes est trivial. Ce problème est connu sous le nom de problème du nombre de classes 1 de Gauss et a été résolu par Heegner en 1952 [16], Baker en 1967 [2] et Stark en 1967 [41]; les corps quadratiques imaginaires dont le groupe des classes est trivial sont les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, où $d \in \{3, 4, 7, 8, 11, 19, 43, 67, 163\}$.

Dans les années '50, Shimura et Taniyama [39] ont généralisé le premier théorème principal de la multiplication complexe aux *variétés abéliennes*. On dit qu'une variété abélienne A de dimension g a multiplication complexe si son anneau d'endomorphismes contient un ordre d'un *corps CM* de degré $2g$. Soit K un corps CM de degré $2g$ et d'ordre maximal $\mathcal{O}_K$ et soit Φ un type CM de K. Soit A une variété abélienne complexe simplement polarisée de dimension g ayant multiplication complexe par $\mathcal{O}_K$. Le premier théorème principal de la multiplication complexe dans ce cadre affirme que le corps de classes H du corps du modules M de la variété abélienne simplement polarisée A est une extension non ramifiée du *corps reflex* K^r de K. De plus, le corps des classes H correspond au groupe d'idéaux $I_0(\Phi^r)$ (voir page 17) qui ne dépend que de (K, Φ), confer Théorème 1.5.6. Notons que le premier théorème de la multiplication complexe implique que si la variété abélienne polarisée A est définie

sur K^r, le *groupe des classes CM* $I_{K^r}/I_0(\Phi^r)$ est trivial.

Comme dans le cas des courbes elliptiques, on peut alors chercher à déterminer les couples CM (K, Φ) pour lesquels les variétés abéliennes correspondantes sont définies sur K^r. De façon équivalente, il s'agit de déterminer les couples CM (K, Φ) dont le *groupe des classes CM*, $I_{K^r}/I_0(\Phi^r)$, est trivial. Dans cette thèse, on résout ce problème dans le cas des corps CM quartiques imaginaires (voir Chapitre 2) ainsi que dans celui des corps CM sextiques contenant un corps quadratique imaginaire (voir Chapitre 3).

Enfin, on peut se demander quels sont les corps CM pour lesquels la variété abélienne simple à multiplication complexe admet $\mathbb{Q}$ comme corps de module. Murabayashi et Umegaki [31] ont déterminé les corps quartiques CM correspondant aux surfaces abéliennes simples à multiplication complexe de corps du module $\mathbb{Q}$. Dans le chapitre 4, on détermine les corps CM sextiques correspondant aux variétés abéliennes simples à multiplication complexe de dimension 3 de corps du module $\mathbb{Q}$.