

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/37019> holds various files of this Leiden University dissertation

**Author:** Brau Avila, Julio

**Title:** Galois representations of elliptic curves and abelian entanglements

**Issue Date:** 2015-12-01

## Samenvatting

Dit proefschrift richt zich in hoofdzaak op de studie van Galois-representaties geassocieerd met de torsiepunten van elliptische krommen. In het eerste hoofdstuk beschouwen we het probleem om het beeld te bepalen van de Galoisrepresentatie  $\rho_E$  van een elliptische kromme zonder CM over het lichaam van de rationale getallen  $\mathbb{Q}$ . We geven een deterministische algoritme dat het beeld van  $\rho_E$  bepaalt als ondergroep van  $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ , waarbij de output gegeven wordt als een geheel getal  $m$  tesamen met een eindige ondergroep. Het beeld van  $\rho_E$  is dan de ondergroep van alle elementen van  $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$  waarvan de reductie modulo  $m$  to  $G(m)$  behoort.

In het tweede deel ontwikkelen we een methode die van karaktersommen gebruik maakt om uitgaande van het beeld van  $\rho_E$  dichtheden te beschrijven van verzamelingen van priemenvoor zekere voorgeschreven eigenschappen heeft. Als  $E$  een elliptische kromme over  $\mathbb{Q}$  is, dan volgt uit werk van Serre en Hooley dat, onder aanname van de Gegeneraliseerde Riemannhypothese, de dichtheid van de verzameling priemenvoor de groep van  $\mathbb{F}_p$ -rationale punten van de gereduceerde kromme cyclisch is, geschreven kan worden als een oneindig product  $\prod \delta_\ell$  van locale factoren  $\delta_\ell$  die de graad van de  $\ell$ -torsielichamen reflecteren, vermenigvuldigd met met een factor die corrigeert voor de verstrengeling tussen de torsielichamen. We laten zien dat deze correctiefactor geïnterpreteerd kan worden als een karaktersom, en de resulterende beschrijving stelt ons in staat om

op eenvoudige wijze criteria voor het verdwijnen van de correctiefactor te bepalen. We passen onze karaktersom methode toe in een aantal andere situaties. Hieronder is het hiervoor genoemde probleem met de aanvullende voorwaarde dat de priem en in een gegeven meetkundige reeks liggen. We bestuderen ook de vermoede constanten die voorkomen in een vermoeden van Koblitz betreffende de dichtheid van priem en waarvoor de cardinaliteit van de groep van  $\mathbb{F}_p$ -punten van  $E$  een priemgetal is. Het unificerende thema in al deze situaties is dat de constanten waarin we geïnteresseerd zijn, geheel bepaald worden door het beeld van  $\rho_E$ .

Het laatste hoofdstuk gaat in op de classificatie van niet-Serre-krommen. Een elliptische kromme over  $\mathbb{Q}$  is een *Serre-kromme* als de ermee geassocieerde Galoisrepresentatie zo groot mogelijk is, en het is bekend dat de meeste elliptische krommen over  $\mathbb{Q}$  van dit type zijn. We presenteren een modulaire kromme van niveau 6 die een verzameling van modulaire krommen die niet-Serre-krommen parametriseren completeert. Deze modulaire kromme geeft ook een oneindige familie van elliptische krommen met niet-abelse "verstregelingslichamen". Het aangeven van zo'n familie komt op natuurlijke wijze naar voren in relatie tot de vragen in het vorige hoofdstuk met betrekking tot de classificatie van elliptische krommen waarvoor we de karaktersom methode toe kunnen passen.