Author: Nadimpalli, Santosh
Title: Typical representations for GLn(F)
Issue Date: 2015-06-16

Résumé des résultats

Soit F un corps local commutatif à corps résiduel fini k_F. Dans cette thèse nous étudions, pour $n \geq 2$, la restriction d'une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$ à un sous-groupe compact maximal K. En particulier, nous nous intéressons aux représentations irréductibles lisses (appelées représentations K-typiques) de K qui déterminent le support inertiel de la représentation lisse irréductible donnée. Dans le contexte de la correspondance de Langlands locale, ces représentations ont eu des applications arithmétiques importantes. Dans cette thèse, nous essayons de réaliser, dans de nombreux cas, la classification de ces représentations lisses irréductibles de K pour un support inertiel donné s.

Motivation

Correspondance de Langlands locale pour GL_n

Nous fixons une clôture algébrique séparable $\bar{F}$ de F. Soit F^{un} la sous-extension maximale non-ramifiée dans $\bar{F}$. Nous avons une application canonique

$$\mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{Gal}(F^{un}/F).$$

Le groupe $\mathrm{Gal}(F^{un}/F)$ est canoniquement isomorphe au groupe de Galois du corps résiduel $k_{F^{un}}$ de F^{un} sur k_F. Comme $k_{F^{un}}$ est la clôture algébrique du corps fini k_F nous obtenons l'application

$$\mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to \mathrm{Gal}(k_{F^{un}}/k_F) \simeq \hat{\mathbb{Z}}. \tag{1}$$

Soit q le cardinal du corps résiduel k_F. On note par Φ_F l'automorphisme de $k_{F^{un}}$ qui envoie un élément x à x^q. Soit W_F le groupe constitué par les éléments de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ qui induisent une puissance entière de Φ_F par l'application (1). Le groupe W_F est appelé le groupe de Weil de F. Le groupe W_F devient un groupe localement compact en déclarant les sous-groupes ouverts de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F^{un})$ (avec sa topologie profinie) sous-groupes ouverts de W_F. Ainsi nous obtenons une suite exacte de groupes topologiques

$$0 \to \mathrm{Gal}(\bar{F}/F^{un}) \to W_F \to \Phi_F^{\mathbb{Z}} \to 0$$

où $\Phi_F^{\mathbb{Z}}$ est muni de la topologie discrète.

La théorie des corps de classes locaux nous donne un isomorphisme topologique

$$W_F^{ab} \simeq F^\times,$$

où W_F^{ab} est le quotient de W_F par l'adhérence du groupe dérivé de W_F. Cela nous donne une bijection entre les caractères continus de W_F et ceux de

$F^\times$. La correspondance de Langlands locale établit un analogue en dimension supérieure de la correspondance entre les caractères obtenus par la théorie du corps de classes local. Une telle correspondance peut être formulée en termes de certain objets algébriques appelés représentations de Weil-Deligne. Pour commencer, nous introduisons une norme $\|\|$ sur le groupe de Weil W_F. Soit x un élément de W_F, d'image Φ_F^r par la application (1), alors $\|x\| = q^{-r}$. Une représentation de Weil-Deligne de dimension n est un triplet (r, V, N) où V est un espace vectoriel complexe de dimension n, r est un homomorphisme de W_F dans $\mathrm{GL}(V)$ dont le noyau est ouvert, N est un élément de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ qui satisfait

$$r(x)Nr(x)^{-1} = \|x\|N.$$

pour tout $x \in W_F$. Nous disons qu'un triplet (r, V, N) est Frobenius semi-simple si la représentation (r, V) est semi-simple. La correspondance de Langlands locale (voir [LRS93] pour le cas où la caractéristique de F est non nulle et [HT01] et [Hen00] pour le cas où la caractéristique de F est égal à zéro) est une correspondance naturelle entre l'ensemble des classes isomorphismes de représentation Weil-Deligne de dimension n, Frobenius semi-simples, et l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréductibles complexes lisses de $\mathrm{GL}_n(F)$. (Une représentation (π, V) est dite lisse si et seulement si pour tout $v \in V$ le stabilisateur de v est ouvert dans $\mathrm{GL}_n(F)$ pour la topologie induite à partir de F).

Soit B_n l'ensemble des couples (M, σ) où M est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}_n(F)$ et σ une représentation irréductible cuspidale de M. Nous rappelons que **l'équivalence inertielle** est une relation d'équivalence sur l'ensemble B_n définie par $(M_1, \sigma_1) \sim (M_2, \sigma_2)$ si et seulement s'il existe un élément $g \in G$ et un caractère non ramifié χ de M_2 tel que $M_1 = gM_2g^{-1}$ et $\sigma_1^g \simeq \sigma_2 \otimes \chi$. Nous utilisons la notation $[M, \sigma]$ pour la classe d'équivalence contenant le couple (M, σ). Les classes d'équivalence sont également appelées **classes inertielles**. Chaque représentation irréductible lisse intervient dans une représentation induite parabolique $i_P^{\mathrm{GL}_n(F)}(\sigma)$ où σ est une représentation irréductible cuspidale d'un sous-groupe de Levi M de P. Le couple (M, σ) est bien déterminé à $\mathrm{GL}_n(F)$-conjugaison près (voir [BZ77][Theorem 2.5 Theorem 2.9(a)(i)]). La classe $[M, \sigma]$ est appelé **le support inertiel** de π.

Étant donné deux triples (r_1, V_1, N_1) et (r_2, V_2, N_2), il se trouve que les restrictions de r_1 et r_2 au groupe $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F^{un})$ sont isomorphes si et seulement si les représentations lisses π_1 et π_2 associées par la correspondance de Langlands locale pour (r_1, V_1, N_1) et (r_2, V_2, N_2) respectivement ont le même support inertiel. Dans plusieurs applications arithmétiques (par exemple voir [BM02] et [EG14]) on cherche à associer à un support inertiel donné, disons s, une représentation lisse irréductible τ de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ qui a la propriété que si $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\tau, \pi) \neq 0$ alors le support inertiel de π est s. Une telle représentation est appelée $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$**-représentation typique**.

Théorie des types

Soit G le groupe de F-points d'un groupe réductif algébrique. Il a été montré par Bernstein que la catégorie des représentations lisses $\mathcal{M}(G)$ admet une décomposition

$$\mathcal{M}(G) = \prod_{s \in \mathcal{B}(G)} \mathcal{M}_s(G)$$

où $\mathcal{M}_s(G)$ est la sous-catégorie pleine composée des représentations lisses telles que tous leurs sous-quotients irréductibles ont support inertiel s. La théorie des types développée initialement par Bushnell-Kutzko (voir [BK98] pour une discussion générale sur les représentations lisses et la théorie des types) donne une construction de couples (J_s, λ_s) où J_s est un sous-groupe ouvert compact de G et λ_s est une représentation irréductible lisse de J_s telle que $\mathrm{Hom}_{J_s}(\lambda_s, \pi) \neq 0$ si et seulement si $\pi \in \mathcal{M}_s(G)$ pour toutes les représentations lisses irréductibles π de G. Un tel couple (J_s, λ_s) est appelé un **type** pour s. Un tel type (J_s, λ_s) donne une équivalence naturelle de catégories entre $\mathcal{M}_s(G)$ et la catégorie des modules sur l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(J_s, \lambda_s)$.

Soit K un sous-groupe compact maximal de G et s une classe inertielle de G. Soit (J_s, λ_s) un type pour s telle que $J_s \subset K$. Soit Γ une sous-représentation irréductible de

$$\mathrm{ind}_{J_s}^{K}(\lambda_s). \tag{2}$$

Soit π une représentation lisse irréductible de G telle que $\mathrm{res}_K\, \pi$ contient Γ. Alors $\mathrm{res}_{J_s}\, \pi$ contient λ_s par réciprocité de Frobenius. Donc le support inertiel de π est s. Cela montre que les sous-représentations irréductibles de (2) sont K-typiques. Comme l'existence de types n'est pas connue dans tous les cas, les questions naturelles suivantes se posent:

1. Est-ce qu'une représentation K-typique existe?
2. Pour une classe inertielle s, est-ce que les représentations K-typiques sont en nombre fini?
3. Comment classifier les représentations K-typiques?

Pour $G = \mathrm{GL}_n(F)$ des types (J_s, λ_s) ont été explicitement construits par Bushnell-Kutzko dans les articles [BK93] et [BK99]. Pour $\mathrm{GL}_n(F)$, nous choisissons "le type de Bushnell-Kutzko" (J_s, λ_s) tel que $J_s \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ pour tout $s \in \mathcal{B}_n$. Dans cette thèse, nous donnons des réponses aux questions ci-dessus pour $G = \mathrm{GL}_n(F)$ en termes de la théorie des types. Pour $\#k_F > 3$ nous montrons dans de nombreux cas que les sous-représentations irréductibles de

$$\mathrm{ind}_{J_s}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\lambda_s)$$

sont précisément les représentations typiques pour la classe inertielle s. En ce sens, nous classifions les représentations typiques pour la classe s. Notons que les types construits par Bushnell-Kutzko ne sont pas toujours uniques, même à conjugaison près. Nous utilisons la terminologie “le type de Bushnell-Kutzko” pour le couple (J_s, λ_s), le type pour $s = [M, \sigma]$ construit par la procédure inductive dans l'article [BK99] après la fixation d'un type pour la classe inertielle $[M, \sigma]$ de M.

Il existe différentes méthodes de construction de types (J, λ) pour une classe inertielle donnée s (en ce sens que le couple (J, λ) a la propriété $\mathrm{Hom}_J(\lambda, \pi) \neq 0$ si et seulement si le support inertiel de π est s pour toute représentation lisse irréductible π de G). Pour une telle construction et K un sous-groupe compact maximal contenant J, les sous-représentations irréductibles de

$$\mathrm{ind}_J^K(\lambda)$$

sont des représentations K-typiques pour s. La théorie des représentations typiques, au moins pour le cas de GL_n, vise à donner une approche uniforme. Il pourrait être intéressant de prouver au moins la finitude du nombre des représentations K-typiques dans le cas général.

Résultats connus

Le cas de $\mathrm{GL}_2(F)$ est traité par Henniart dans l'annexe à l'article [BM02]. Il a complètement classifié les représentations typiques pour toutes les classes inertielles. Henniart prédit que ses résultats peuvent être étendus à $\mathrm{GL}_n(F)$. Paskunas a classé les représentations typiques pour les classes inertielles $[\mathrm{GL}_n(F), \sigma]$. Nous décrivons maintenant les résultats d'Henniart et de Paskunas. Nous remarquons que J_s peut être conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$. Nous supposerons que J_s est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$.

Théorème 0.0.1 (Henniart)**.** *Soit s une classe inertielle pour $\mathrm{GL}_2(F)$. Soit (J_s, λ_s) le type de Bushnell-Kutzko pour la classe inertielle s. Si $\#k_F > 2$ et $s = [\mathrm{GL}_2(F), \sigma]$ alors les représentations typiques de s sont les sous-représentations irréductibles de*

$$\mathrm{ind}_{J_s}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)}(\lambda_s).$$

Soit T le tore maximal de $\mathrm{GL}_2(F)$ constitué des matrices diagonales et soit $s = [T, \chi]$ une classe inertielle pour $\mathrm{GL}_2(F)$. Nous identifions T à $F^\times \times F^\times$ et le caractère χ à $\chi((a, b)) = \chi_1(a)\chi_2(b)$ pour deux caractères χ_1 et χ_2 de $F^\times$. Soit B un sous-groupe de Borel contenant T. Soit $B(m)$ le groupe des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ qui, sous la réduction mod $\mathfrak{P}_F^m$ se trouvent dans le groupe $B(\mathcal{O}_F/\mathfrak{P}_F^m)$. Soit N le niveau de $\chi_1\chi_2^{-1}$. Si $\chi_1\chi_2^{-1} \neq \mathrm{id}$, et si $\#k_F = 2$, Henniart a montré que

$$\mathrm{ind}_{B(N)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)}(\chi) \quad \text{et} \quad \mathrm{ind}_{B(N+1)}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)}(\chi)$$

sont typiques pour la classe inertielle s. Le type de Bushnell-Kutzko pour la classe inertielle $s = [T, \chi]$ est donné par $(B(N), \chi)$. Donc, cela montre que dans le cas présent il y a en effet des représentations supplémentaires autres que les sous-représentations irréductibles de (2) qui sont typiques pour s. Pour toutes les autres classes inertielles $[T, \chi]$ Henniart montre que les représentations typiques sont des sous-représentations de (2).

Pour la classe inertielle $s = [\mathrm{GL}_n(F), \sigma]$ il découle facilement que

$$\mathrm{ind}_{J_s}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\lambda_s)$$

est une représentation irréductible et Paskunas dans l'article [Pas05] a montré le théorème suivant.

Théorème 0.0.2 (Paskunas). *Pour tout entier $n > 1$ et pour toute classe inertielle $s = [\mathrm{GL}_n(F), \sigma]$ il existe une seule représentation typique pour s.*

Résultats de cette thèse

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la classification des représentations typiques pour les classes inertielles $[M, \sigma]$ où M est un sous-groupe de Levi propre de $\mathrm{GL}_n(F)$ et $n \geq 3$. Alors nous choisissons le type de Bushnell-Kutzko (J_s, λ_s) est conjugué de sorte que $J_s \subset \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$. Nous donnons une description détaillée des résultats de chaque chapitre.

Résultats du chapitre 2

Si τ est une représentation typique pour une classe inertielle s alors nous montrons que τ est un sous-représentation d'une représentation irréductible lisse notée $\pi \in \mathcal{M}_s(G)$ de $\mathrm{GL}_n(F)$. Nous choisissons un représentant (M, σ) de s tel que M est le sous-groupe de Levi composé de matrices diagonales par blocs et σ naturellement une représentation supercuspidale de M. Maintenant, la représentation π est une sous-représentation de

$$i_P^{\mathrm{GL}_n(F)}(\sigma \otimes \chi)$$

où P est un sous-groupe parabolique contenant M comme sous-groupe de Lévi et $i_P^{\mathrm{GL}_n(F)}$ est l'induction parabolique et χ est un caractère non ramifié de M. Ainsi, pour la classification des représentations typiques, il faut trouver les représentations typiques qui apparaissent dans la représentation

$$\mathrm{res}_{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}\{i_P^{\mathrm{GL}_n(F)}(\sigma)\} \simeq \mathrm{ind}_{P \cap \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\sigma). \tag{3}$$

Maintenant, nous identifions M au produit

$$\mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \mathrm{GL}_{n_2}(F) \times \ldots \mathrm{GL}_{n_r}(F)$$

pour une partition ordonnée $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ de n et σ au produit tensoriel $\sigma_1 \boxtimes \sigma_2 \boxtimes \cdots \boxtimes \sigma_r$ où σ_i est une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$. Soit τ_i la représentation typique unique dans σ_i. Il a été montré par Will Conley que la représentation

$$\mathrm{ind}_{P \cap \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\boxtimes_{i=1}^r \tau_i)$$

admet un complément X dans (3) tel que les $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$-sous-représentations irréductibles de X sont non-typiques pour la classe inertielle s.

Maintenant, toutes les représentations typiques pour s sont des $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ sous-représentations irréductibles de

$$\mathrm{ind}_{P \cap \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\boxtimes_{i=1}^r \tau_i).$$

Cette représentation est toujours une représentation de dimension infinie. La première idée est de construire des sous-groupes compacts ouverts H_m pour $m \geq 1$ tels que $H_{m+1} \subset H_m$,

$$\cap_{m \geq 1} H_m = P \cap \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$$

et que $\boxtimes_{i=1}^r \tau_i$ se prolonge à une représentation de H_1. Avec quelques conditions supplémentaires, nous montrons que

$$\mathrm{ind}_{P \cap \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\boxtimes_{i=1}^r \tau_i) \simeq \bigcup_{m \geq 1} \mathrm{ind}_{H_m}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\boxtimes_{i=1}^r \tau_i).$$

Pour tout support inertiel nous définissons les H_m dans chaque chapitre et nous analysons les représentations

$$\mathrm{ind}_{H_m}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\boxtimes_{i=1}^r \tau_i).$$

En plus de cela, nous montrons plusieurs lemmes qui sont fréquemment utilisés dans l'ensemble de cette thèse.

Résultats du chapitre 3

Ce chapitre concerne les classes inertielles, dites classes inertielles de niveau zéro,

$$[M = \prod_{i=1}^r \mathrm{GL}_{n_i}(F), \boxtimes_{i=1}^r \sigma_i]$$

où chaque σ_i contient un vecteur non nul fixé par le sous-groupe de congruence principal de niveau un. Le type de Bushnell-Kutzko pour σ_i est donné par

$(\mathrm{GL}_{n_i}(\mathcal{O}_F), \tau_i)$ où τ_i est obtenu par inflation d'une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_{n_i}(k_F)$ pour tous $i \leq r$. Maintenant, choisissons P le groupe de matrices diagonales supérieures par blocs contenant M comme un sous-groupe de Levi. Pour un entier $m \geq 1$ nous désignons par $P(m)$ le groupe de matrices dans $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ qui, par réduction mod-$\mathfrak{P}_F^m$ appartiennent au groupe $P(\mathcal{O}_F/\mathfrak{P}_F^m)$. Maintenant, la représentation $\boxtimes_{i=1}^r \tau_i$ peut être vue comme une représentation de $P(1)$ par inflation. La suite des groupes H_m, que nous avons annoncée dans la sous-section précédente, est donnée par les $P(m)$.

Pour simplifier la notation, nous noterons V_m la représentation

$$\mathrm{ind}_{P(m)}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\boxtimes_{i=1}^r \tau_i).$$

Par récurrence sur l'entier positif m, nous montrons le théorème suivant.

Théorème 0.0.3. *Les $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$-sous-représentations irréductibles de V_m/V_1 ne sont pas typiques pour la classe inertielle $s = [M, \sigma]$.*

Nous construisons en fait un complément de V_1 dans V_m.

Nous notons que le type de Bushnell-Kutzko pour la classe inertielle s est donnée par le couple $(P(1), \boxtimes_{i=1}^r \tau_i)$. Du théorème ci-dessus, nous pouvons conclure que le théorème ci-dessus classe complètement les représentations typiques dans ce cas. Grâce à notre analyse, nous gagnons quelques informations supplémentaires. Nous concluons le résultat dans le théorème suivant.

Théorème 0.0.4. *Soit $s = [M, \sigma]$ une classe inertielle de niveau zéro. Soit Γ une représentation typique pour la classe inertielle s. La représenaentation Γ est une sous-représentation irréductible de V_1 et*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\Gamma, V_1) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\Gamma, i_P^{\mathrm{GL}_n(F)}(\sigma)).$$

Résultats du chapitre 4

Soit T_n le tore maximal composé des matrices diagonales inversibles dans $\mathrm{GL}_n(F)$. Pour $\#k_F > 3$ nous déterminons les représentations typiques pour les classes inertielles $s = [T_n, \chi]$. Nous allons montrer que les représentations typiques apparaissent comme des sous-représentations de

$$\mathrm{ind}_{J_s}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\lambda_s).$$

Premièrement, notre but est de définir les groupes H_m tel que $H_{m+1} \subset H_m$ et $\cap_{m \geq 1} H_m = B_n(\mathcal{O}_F)$ où B_n est le sous-groupe de Borel composé de matrices triangulaires supérieures inversibles. Nous notons que le type de Bushnell-Kutzko (J_s, λ_s) dans ce cas, a la propriété $J_s \cap B_n = B_n(\mathcal{O}_F)$. Nous pouvons donc choisir $H_1 = J_s$ et les autres groupes doivent être définies plus précisément. Nous esquissons les détails.

Nous identifions T_n au groupe $\times_{i=1}^n F^\times$ et le caractère χ à $\boxtimes_{i=1}^n \chi_i$ où χ_i est un caractère lisse de $F^\times$. On note $l(\chi)$ l'entier $k>0$ minimal tel que $1+\mathfrak{P}_F^k$ est contenu dans le noyau de χ. Soit $J_\chi(m)$ l'ensemble constitué de matrices (a_{ij}) où $a_{ij} \in \mathfrak{P}_F^{l(\chi_i\chi_j^{-1})+m-1}$ pour tout $i>j$, $a_{ii} \in \mathcal{O}_F^\times$ et $a_{ij} \in \mathcal{O}_F$ pour tout $i<j$. Nous allons montrer que $J_\chi(m)$ est en effet un sous-groupe ouvert compact et nous établissons également que

1. $J_s = J_\chi(1)$
2. $\cap_{m\geq 1} J_\chi(m) = B_n(\mathcal{O}_F)$
3. Le caractére χ de $T(\mathcal{O}_F)$ s'étend à un caractère de $J_\chi(1)$.

Par conséquent, nous définissons $H_m = J_\chi(m)$ pour tout $m \geq 1$. Cela montre que

$$\mathrm{res}_{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}\, i_{B_n}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\chi) \simeq \bigcup_{m\geq 1} \mathrm{ind}_{J_\chi(m)}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\chi)$$

On note $V_m(\chi)$ la représentation

$$\mathrm{ind}_{J_\chi(m)}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\chi).$$

En utilisant une réccurence sur les entiers $n>0$ et $m>0$, nous montrons le théorème suivant.

Théorème 0.0.5. *Les $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)$ sous-représentations irréductibles de $V_m(\chi)/V_1(\chi)$ ne sont pas typiques pour les classes inertielles de $s=[T_n,\chi]$.*

Résultats du chapitre 5

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la classification des représentations typiques pour les classes inertielles $s=[\mathrm{GL}_n(F)\times GL_1(F), \sigma\boxtimes\chi]$. Dans ce chapitre et le suivant, nous allons utiliser les techniques de [BK93] comme des chaînes de réseaux, ordres héréditaires, suites de réseaux, β-extensions etc. avec des références précises. Soit P un sous-groupe parabolique composé des matrices triangulaires supérieures par blocs de type $(n,1)$. On note M le sous-groupe de Levi de P constitué de matrices diagonales par blocs. Nous rappelons que $P(m)$ a le sens habituel. On note τ la représentation typique unique, apparaissant dans la représentation cuspidale σ. Nous pouvons ainsi supposer que χ est trivial.

Les représentations typiques se produisent comme des sous-représentations de la représentation

$$V_m := \mathrm{ind}_{P(m)}^{\mathrm{GL}_{n+1}(\mathcal{O}_F)}(\tau\boxtimes\mathrm{id}).$$

pour un entier $m\geq N$ (N sera défini explicitement plus tard). Pour des raisons qui seront expliquées plus tard, nous définissons un sous-groupe compact ouvert $P^0(m)$ de $P(m)$ tel que $P^0(m)\cap M = J^0\times\mathcal{O}_F^\times$, $P^0(m)\cap U = P(m)\cap U$,

$P^0(m) \cap \bar{U} = P(m) \cap \bar{U}$ et $\lambda \boxtimes \mathrm{id}$ se prolonge à une représentation de $P^0(m)$. Nous montrons également que

$$\mathrm{ind}_{P^0(m)}^{\mathrm{GL}_{n+1}(\mathcal{O}_F)}(\lambda \boxtimes \mathrm{id}) \simeq \mathrm{ind}_{P(m)}^{\mathrm{GL}_{n+1}(\mathcal{O}_F)}(\tau \boxtimes \mathrm{id}).$$

Par récurrence sur m, $m \geq N$, nous montrons que les $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathcal{O}_F)$ sous-représentations de V_m/V_1 sont non typiques.

Le type de Bushnell-Kutzko J_s est assez près de $P^0(N)$, dans le sens que $P^0(N) \cap P = J_s \cap P$ et de plus $\bar{U}(\varpi_F^N) \subset P^0(N) \cap \bar{U} \subset J_s \cap \bar{U} \subset \bar{U}(\varpi^{N-1}\,\mathcal{O}_F)$. En utilisant la décomposition de $\mathrm{ind}_{P^0(N)}^{J_s}(\mathrm{id})$, nous prouvons le théorème suivant.

Théorème 0.0.6. *Soit Γ une représentation typique de la classe inertielle $s = [\mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_1(F), \sigma \boxtimes \chi]$ et $\#k_F > 2$. La représentation Γ est unique et se plonge avec multiplicité un dans*

$$i_P^{\mathrm{GL}_{n+1}(F)}(\sigma \boxtimes \chi).$$

Résultats du chapitre 6

Dans ce chapitre, nous allons classifier les représentations typiques pour certaines classes inertielles

$$s = [\mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{GL}_2(F), \sigma_1 \boxtimes \sigma_2].$$

Soit P le sous-groupe parabolique composé de matrices triangulaires supérieures par blocs de type $(2,2)$. Soit M le sous-groupe de Levi de P et soit U le radical unipotent de P. On note $\bar{P}$ le sous-groupe parabolique opposé de P par rapport à M. Soit $\bar{U}$ le radical unipotent de $\bar{P}$. Soient (J_1^0, λ_1) et (J_2^0, λ_2) les types de Bushnell-Kutzko pour les classes inertielles $[\mathrm{GL}_2(F), \sigma_1]$ et $[\mathrm{GL}_2(F), \sigma_2]$ respectivement. Les groupes $P(m)$ auront le sens habituel pour $m \geq 1$. Nous définissons aussi un groupe $P^0(m)$ pour $m \geq N$ où N sera défini explicitement dans le texte principal du chapitre 6. Les groupes $P^0(m)$ ont leur décomposition d'Iwahori par rapport à P et M; $P^0(m) \cap \bar{U} = P(m) \cap \bar{U}$, $P^0(m) \cap U = P(m) \cap U$ et $P^0(m) \cap M = J_1^0 \times J_2^0$; et

$$\mathrm{ind}_{P(m)}^{\mathrm{GL}_4(\mathcal{O}_F)}(\tau_1 \boxtimes \tau_2) \simeq \mathrm{ind}_{P^0(m)}^{\mathrm{GL}_4(\mathcal{O}_F)}(\lambda_1 \boxtimes \lambda_2)$$

pour tous $m \geq N$.

Par des méthodes similaires à celles des chapitres 2, 3, 4, 5 nous allons réduire le problème de la classification des représentations typiques de s à trouver des représentations typiques se produisant en tant que sous-représentations de

$$\mathrm{ind}_{P^0(N+1)}^{\mathrm{GL}_4(\mathcal{O}_F)}(\lambda_1 \boxtimes \lambda_2). \tag{4}$$

Il se trouve que le type de Bushnell-Kutzko pour s n'est pas de la forme $(P^0(N+1), \lambda_1 \boxtimes \lambda_2)$ pour presque tous les cas. Cela signifie que nous ne pouvons pas conclure directement que les représentations typiques pour la classe inertielle s sont précisément les sous-représentations de (4).

Nous prévoyons (au moins lorsque $\#k_F > 2$) que les représentations typiques doivent se produire en tant que sous-représentations des

$$\mathrm{ind}_{J_s}^{\mathrm{GL}_4(\mathcal{O}_F)}(\lambda_1 \boxtimes \lambda_2).$$

Nous avons comparé les dimensions de la représentation ci-dessus avec celle de (4) et avons observé qu'elles sont en effet différentes et cela nous a donné la première heuristique pour s'attendre à ce qu'il y a des sous-représentations irréductibles non typiques qui se produisent dans (4). Nous avons essayé et même réussi dans de nombreux cas à classer les représentations typiques apparaissant dans (4). Nous allonons expliquer le résultat principal après avoir rappelé quelques aspects de la construction par Bushnell-Kutzko d'un type semi-simple pour s.

Soit $[\mathfrak{A}_1, n_1, 0, \beta_1]$ et $[\mathfrak{A}_2, n_2, 0, \beta_2]$ deux strates simples définissant les types de Bushnell-Kutzko (J_1^0, λ_1) et (J_2^0, λ_2) respectivement. On note e_1 et e_2 les indices de ramification des ordres héréditaires $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ respectivement. On note ϕ_i le facteur irréductible du polynôme caractéristique associé aux strates simples $[\mathfrak{A}_i, n_i, 0, \beta_i]$ pour $i \in \{1, 2\}$ (voir [BK93][Section 2.3]). Nous avons deux cas.

1. $n_1/e_1 \neq n_2/e_2$; $n_1/e_1 = n_2/e_2$ but $\phi_1 \neq \phi_2$.
2. $n_1/e_1 = n_2/e_2$ and $\phi_1 = \phi_2$

Les représentations σ_1 et σ_2 sont appelés **complètement distinctes** si elles satisfont à la condition (1). Sinon, elles sont dites avoir une **approximation commune**. Le cas d'approximation commune peut être divisé en 2 cas. Le premier est appelé cas homogène, approximation commune au niveau zéro. Le cas homogène dans notre situation actuelle (à la fois σ_1 et σ_2 sont des représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$) signifie que $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 := \mathfrak{A}$, $n_1 = n_2 := n$ et $\beta_1 = \beta_2 := \beta$. Et le caractère simple définissant l'extension β, κ, est isomorphe pour σ_1 and σ_2. Le deuxième cas est celui d'une approximation commune au niveau $l > 0$. En raison du manque de temps, nous ne traitons pas le cas où σ_1 et σ_2 ont approximation commune au niveau $l > 0$. Notre théorème principal est le suivant.

Théorème 0.0.7. *Soit $\#k_F > 3$ et s la classe inertielle*

$$[\mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{GL}_2(F), \sigma_1 \boxtimes \sigma_2]$$

où σ_1 et σ_2 sont complètement distinctes ou homogènes. Les représentations typiques pour la classe inertielle s sont précisément les sous-représentations *irréductibles de*

$$\mathrm{ind}_{J_s}^{\mathrm{GL}_4(\mathcal{O}_F)}(\lambda_s).$$

Nous allons d'abord examiner la classification des représentations typiques pour le cas homogène. Nous esquissons la preuve en détail.

Le type de Bushnell-Kutzko, (J_s, λ_s), pour la classe inertielle $s = [M, \sigma_1 \boxtimes \sigma_2]$, avec chaque σ_i contenant le type (J^0, λ_i) (qui est défini par les strates simples $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$) est donnée par $\lambda_s = \lambda_1 \boxtimes \lambda_2$ et

$$J_s := \begin{pmatrix} J^0 & \mathcal{O}_E + \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^{(n-t)} \\ \mathfrak{P}_E + \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^{t+1} & J^0 \end{pmatrix}$$

pour $e = [n/2]$ et $E = F[\beta]$. Une observation importante est que $J_s \cap U \neq U(\mathcal{O}_F)$. Cela nous donne le problème principal. Pour attaquer cette situation, nous essayons d'abord de modifier les représentations induites (4) au niveau des sous-groupes à proximité de $P^0(N+1)$ et de J_s. Nous allons expliquer cela dans le cas non ramifié ($e(E|F) = 1$) où les notations sont déjà définies.

La première étape consiste à scinder la représentation

$$\rho_1 := \mathrm{ind}_{P^0(n+1)}^{P^0(t+1)}(\lambda_s).$$

L'idée est de remplacer le groupe $P^0(n+1)$ par le groupe J_s et de voir l'entrelacement entre ρ_1 et

$$\rho_2 := \mathrm{ind}_{J_s}^{P^0(t+1)}(\lambda_s).$$

Mais nous ne pouvons pas faire cela pour la raison très simple que $P^0(t)$ ne contient pas le groupe J_s. Alors nous utilisons un petit groupe J'_s tel que J'_s est contenu dans le groupe $P^0(t)$. Le seul changement entre J'_s et J_s est leur intersection avec le groupe unipotent inférieur. Ce groupe J'_s a la propriété que $P^0(n+1)J'_s = P^0(t)$ et la représentation

$$\rho_3 := \mathrm{ind}_{J'_s}^{P^0(t)}(\lambda_s)$$

est irréductible. Nous sommes en bonne situation pour la décomposition de Mackey, l'espace des opérateurs d'entrelacement entre ρ_1 et ρ_3 est de dimension un et tout opérateur d'entrelacement non nul est surjectif en raison de l'irréductibilité de ρ_3. Le reste de la preuve consiste à montrer que le noyau de cet opérateur d'entrelacement non trivial a des sous-représentations irréductibles qui apparaissent également dans ρ_1 pour certaines représentations λ_1 and λ_2.

L'opérateur d'entrelacement non trivial I entre ρ_1 et ρ_3 est donné par l'intégrale suivante:

$$I(f)(p) = \int_{u^- \in \ P(s,t)\cap \bar{U}} f(u^- p)du^-.$$

Si f est une fonction dans le noyau de I alors nous avons

$$\int_{u^-\in\ P^0(t)\cap\bar{U}} f(u^-u^+(u^-)^{-1}u^-)du^- = 0$$

pour tout $u^+\in P^0(t)$. Soient u^- et u^+ représentés dans des matrices par blocs comme

$$u^- = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ U^- & \mathrm{id} \end{pmatrix}, \quad u^+ = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & U^+ \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

respectivement. L'équation intégrale peut être écrite comme

$$\int_{u^-\in\ P^0(t)\cap\bar{U}} \psi_{(\beta U^+ - U^+\beta)}(1+U^-)f(u^-)du^- = 0. \tag{5}$$

Nous notons tout d'abord que le groupe des caractères du groupe

$$P^0(t+1)/P^0(n+1) \simeq (P^0(t+1)\cap\bar{U})/(P^0(n+1)\cap\bar{U}) \simeq \mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^{t+1}/\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^{n+1}$$

est isomorphe à $\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^{-n}/\mathfrak{P}_{\mathfrak{A}}^{-t}$. Le noyau de I est engendré par les caractères qui ne sont pas dans l'image de $[\beta,\cdot]$. Nous allons utiliser le fait dans le lemme 6.2.3 pour montrer à l'aide des applications de co-restriction que les sous-représentations irréductibles de

$$\mathrm{ind}_{P^0(t)}^{\mathrm{GL}_4(\mathcal{O}_F)}(W),$$

où W est une sous-représentation de $\ker(I)$, sont non typiques.

Maintenant, il nous reste à comprendre les sous-représentations typiques de

$$\mathrm{ind}_{J_s'}^{\mathrm{GL}_4(\mathcal{O}_F)}(\lambda_s). \tag{6}$$

Puisque λ_s est une représentation de J_s en utilisant les techniques des chapitres précédents, nous pouvons montrer que la représentation

$$\mathrm{ind}_{J_s}^{\mathrm{GL}_4(\mathcal{O}_F)}(\lambda_s).$$

admet un complément Γ dans la représentation (6) tel que toutes les sous-représentations irréductibles de Γ ne sont pas typiques.

Maintenant, nous traitons le cas où σ_1 et σ_2 sont complètement distinctes. Une modification délicate de la représentation

$$\mathrm{ind}_{P^0(N+1)}^{\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_F)}(\lambda_1 \boxtimes \lambda_s)$$

donne la classification dans le cas où σ_1 et σ_2 sont complètement distinctes. Nous utilisons des techniques similaires à celles développées pour traiter le cas homogène. Ceci est la raison pour laquelle nous choisissons de mettre cette situation plutôt simple à la fin.