

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/29841> holds various files of this Leiden University dissertation.

**Author:** Gao, Ziyang

**Title:** The mixed Ax-Lindemann theorem and its applications to the Zilber-Pink conjecture

**Issue Date:** 2014-11-24

# Résumé

La conjecture de Zilber-Pink est une conjecture diophantienne concernant les intersections atypiques dans les variétés de Shimura mixtes. C'est une généralisation commune de la conjecture d'André-Oort et de la conjecture de Mordell-Lang. Le but de cette thèse est d'étudier Zilber-Pink. Plus concrètement, nous étudions la conjecture d'André-Oort, selon laquelle une sous-variété d'une variété de Shimura mixte est spéciale si son intersection avec l'ensemble des points spéciaux est dense, et la conjecture d'André-Pink-Zannier, selon laquelle une sous-variété d'une variété de Shimura mixte est faiblement spéciale si son intersection avec une orbite de Hecke généralisée est dense. Cette dernière conjecture généralise Mordell-Lang comme expliqué par Pink.

Dans la méthode de Pila-Zannier, un point clef pour étudier la conjecture de Zilber-Pink est de démontrer le théorème d'Ax-Lindemann qui est une généralisation du théorème classique de Lindemann-Weierstrass dans un cadre fonctionnel. Un des résultats principaux de cette thèse est la démonstration du théorème d'Ax-Lindemann dans sa forme la plus générale, c'est-à-dire le théorème d'Ax-Lindemann mixte. Ceci généralise les résultats de Pila, Pila-Tsimerman, Ullmo-Yafaev et Klingler-Ullmo-Yafaev concernant Ax-Lindemann pour les variétés de Shimura pures.

Un autre résultat de cette thèse est la démonstration de la conjecture d'André-Oort pour une grande collection de variétés de Shimura mixtes : inconditionnellement pour une variété de Shimura mixte arbitraire dont la partie pure est une sous-variété de  $\mathcal{A}_6^N$  (par exemple les produits des familles universelles des variétés abéliennes de dimension 6 et le fibré de Poincaré sur  $\mathcal{A}_6$ ) et sous GRH pour toutes les variétés de Shimura mixtes de type abélien. Ceci généralise des théorèmes connus de Klingler-Ullmo-Yafaev, Pila, Pila-Tsimerman et Ullmo pour les variétés de Shimura pures.

Quant à la conjecture d'André-Pink-Zannier, nous démontrons plusieurs cas valables lorsque la variété de Shimura mixte ambiante est la famille universelle des variétés abéliennes. Tout d'abord nous démontrons l'intersection d'André-Oort et André-Pink-Zannier, c'est-à-dire que l'on étudie l'orbite de Hecke généralisée d'un point spécial. Ceci généralise des résultats d'Edixhoven-Yafaev et Klingler-Ullmo-Yafaev pour  $\mathcal{A}_g$ . Nous prouvons ensuite la conjecture dans le cas suivant : une sous-variété d'un schéma abélien au dessus d'une courbe est faiblement spéciale si son intersection avec l'orbite de Hecke généralisée d'un point de torsion d'une fibre non CM est Zariski dense. Finalement pour une orbite de Hecke généralisée d'un  $\overline{\mathbb{Q}}$ -point arbitraire, nous démontrons la conjecture pour toutes les courbes. Ces deux derniers cas généralisent des résultats de Habegger-Pila et Orr pour  $\mathcal{A}_g$ .

Dans toutes les démonstrations, la théorie o-minimale, en particulier le théorème de comptage de Pila-Wilkie, joue un rôle important.