Author: Erhard, Dirk
Title: The parabolic Anderson model and long-range percolation
Issue Date: 2014-07-01

Samenvatting

Dit proefschrift bestaat uit twee onderdelen.

Deel I behandelt het parabolische Anderson model (PAM). Dit is de partiële differentiaalvergelijking $\partial u(x,t)/\partial t = \kappa\Delta u(x,t) + \xi(x,t)u(x,t)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $t \geq 0$, waar u en ξ waarden in $\mathbb{R}$ aannemen, $\kappa \in [0,\infty)$ is de diffusieconstante, Δ is de discrete Laplace-operator, en ξ speelt de rol van een dynamische toevallige omgeving. De beginvoorwaarde $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, is niet-negatief en begrensd. De oplossing van de parabolische Anderson vergelijking beschrijft de evolutie van deeltjes op $\mathbb{Z}^d$ die onafhankelijke random wandelingen met binaire vertakking uitvoeren: deeltjes springen met snelheid $2d\kappa$, splitsen in twee met snelheid $\xi \vee 0$ en sterven met snelheid $(-\xi) \vee 0$. Dit proefschrift behandelt de vraag hoe de exponentiële groei van de deeltjespopulatie afhangt van de diffusieconstante κ. Om deze vraag te beantwoorden bestuderen we de "quenched Lyapunov exponent" λ_0. In hoofdstuk 1 geven we een samenvatting van de bestaande literatuur voor zowel het PAM waarbij ξ niet afhangt van de tijd als het PAM waarbij ξ wel afhangt van de tijd. In hoofdstuk 2 bewijzen we enkele fundamentele eigenschappen van de parabolische Anderson vergelijking, zoals existentie en uniciteit van de oplossing. Bovendien bewijzen we, onder bepaalde ruimte-tijd-mengingsvoorwaarden, dat $\lambda_0 < \infty$ en niet afhangt van de beginvoorwaarde u_0. Onder een extra ruimte-tijd-mengingsvoorwaarde en een "noisiness" voorwaarde tonen we aan dat λ_0 een continue maar niet Lipschitz-continue functie van κ is. Aan het einde van hoofdstuk 2 geven we enkele voorbeelden van dynamische toevallige omgevingen ξ die voldoen aan onze voorwaarden. Hoofdstuk 3 behandelt de vraag hoe λ_0 zich gedraagt voor grote κ. We bewijzen, onder vergelijkbare voorwaarden als in hoofdstuk 2, dat λ_0 convergeert naar $\mathbb{E}(\xi(0,0))$ als $\kappa \to \infty$.

Deel II behandelt twee verschillende percolatie-modellen. In het eerste model worden deeltjes in $\mathbb{R}^d$ geplaatst volgens een Poisson-punt-proces met intensiteit $\lambda > 0$. Vervolgens voert ieder deeltje (onafhankelijk van de andere deeltjes) een d-dimensionale Brownse beweging uit. Een van de belangrijke vragen is of dit netwerk van paden een onbegrensde cluster heeft of niet, en zo ja, of deze cluster uniek is. Het tweede model is random interlacement. Random interlacement met intensiteit $u > 0$ is een random deelverzameling $\mathcal{I}^u$ van $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, die er uit ziet als een pad van een symmetrische random wandeling op de torus $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ gedurende tijd uN^d in de limiet $N \to \infty$. Het is bekend dat er een kritieke waarde $u_*(d) \in (0,\infty)$ is zodanig dat de vacante verzameling $\mathcal{V}^u = \mathbb{Z}^d \setminus \mathcal{I}^u$ voor alle $0 < u < u_*(d)$ een unieke onbegrensde samenhangende cluster $\mathcal{V}^u_\infty$ heeft, maar dat er geen onbegrensde cluster is voor $u > u_*(d)$. In hoofdstuk 4 geven we een korte samenvatting van de bestaande literatuur over percolatie en definiëren we de percolatie-modellen van hoofdstuk 5 en hoofdstuk 6. In hoofdstuk 5 geven we voor het model van Brownse percolatie een compleet antwoord op de vragen van existentie en uniciteit van de onbegrensde cluster voor alle dimensies. In hoofdstuk 6 bewijzen we voor het model van random interlacement dat er een kritieke waarde $u(d)$ is zodanig dat $\mathcal{V}_\infty^u$ transient is voor alle $0 < u < u(d)$, en dat $u(d)/u_*(d) \to 1$ als $d \to \infty$. Dit is het eerste resultaat over de meetkunde van $\mathcal{V}_\infty^u$ voor u dichtbij $u_*(d)$.