

Cover Page



Universiteit Leiden



The handle <http://hdl.handle.net/1887/24880> holds various files of this Leiden University dissertation.

**Author:** Dalhuisen, Jan Willem

**Title:** The Robinson congruence in electrodynamics and general relativity

**Issue Date:** 2014-03-25

# Samenvatting

Dit proefschrift, "De Robinson Congruentie in Elektrodynamica en in de Algemene Relativiteitstheorie", heeft als uitgangspunt een recent gevonden oplossing van de Maxwell vergelijkingen, een zogenaamde elektromagnetische Hopf knoop. Deze kenmerkt zich door een bijzondere structuur van de elektrische en magnetische veldlijnen: elke elektrische (magnetische) veldlijn is gesloten en twee willekeurige elektrische (magnetische) veldlijnen zijn aan elkaar gekoppeld zoals twee naburige olympische ringen. Deze twee eigenschappen gelden voor alle tijdstippen. Er is een uniek moment waarop elke veldlijn een cirkel is. De ruimtevullende verzameling van alle elektrische veldlijnen tezamen vormt op dit unieke tijdstip een Hopf fibratie. De magnetische veldlijnen vormen op dit tijdstip ook een Hopf fibratie, negentig graden gedraaid ten opzichte van de elektrische Hopf fibratie.

In hoofdstuk twee wordt de Hopf fibratie elementair en uitvoerig beschreven.

Deze structuur speelt ook een rol in twistortheorie: een nultwistor wordt voorgesteld als een Hopf fibratie die met de lichtsnelheid langs een centrale as beweegt. Na wiskundige voorbereidingen in de hoofdstukken één en drie, laat hoofdstuk vier zien dat de overeenkomst tussen een elektromagnetische Hopf knoop en een nultwistor geen toeval is. Het Poynting vectorveld van een elektromagnetische knoop heeft op alle tijdstippen de structuur van een Hopf fibratie en deze beweegt met de lichtsnelheid langs de centrale as, net als het beeld van een nultwistor. Een stelling van Robinson wordt gebruikt voor de wiskundige relatie tussen beide.

De bekende Lorentz transformaties maken deel uit van de groep van conforme transformaties. Een conforme inversie is een ander voorbeeld hiervan. De vergelijkingen van Maxwell in vacuüm zijn invariant onder alle conforme transformaties. Hoofdstuk vijf ontwikkelt een methode om middels conforme inversie van een oplossing van Maxwell vergelijkingen een andere oplossing te verkrijgen. Deze methode wordt toegepast op een elektromagnetische Hopf knoop met als verrassend resultaat een andere, maar eenvoudig gerelateerde, Hopf knoop.

De tot de driedimensionale Euclidische ruimte behorende raakvectoren van de Hopf fibratie kunnen met een tijdcomponent worden aangevuld tot een nulvectorveld in Minkowski ruimte, een vlakke ruimtetijd. Dit leidt tot een zogenaamde Robinson congruentie, welke in een vlakke ruimtetijd onlosmakelijk met de Hopf fibratie is verbonden. In een gekromde ruimtetijd is dit verband er niet meer. Omdat in het lineaire regime van Einsteins veldvergelijkingen een oplossing gedacht kan worden als een veld in de Minkowski ruimte, heeft het zin om, in dit regime, te zoeken naar oplossingen met een Hopf structuur. Hoofdstuk zes laat zien dat met behulp van de Penrose transformatie uit de twistortheorie een elektromagnetische Hopf knoop 'gegeneraliseerd' kan worden tot een 'gravitationele Hopf knoop': een oplossing van de gelineariseerde Einstein vergelijkingen waarin vijf Hopf fibraties een rol spelen.

Hoofdstuk acht laat zien dat de Robinson congruentie ook een rol speelt bij oplossingen van de volledige (niet-lineaire) Einstein vergelijkingen. Hoewel de relatie met een Hopf fibratie er nu niet is, kan in de hier beschouwde specifieke klasse van gekromde ruimtetijd toch *in zekere zin* gesproken worden van een Hopf fibratie.

Omdat met elektromagnetische velden een energie-impulsdichtheid geassocieerd wordt, moet bij het oplossen van Einsteins vergelijkingen ook dit veld in de bronterm worden verwerkt. Hoofdstuk tien beschrijft een poging om de gekromde ruimtetijd te vinden met een elektromagnetische Hopf knoop als enige bron. Een bij dit vraagstuk behorende moeilijkheid betreft de definitie van de bron in de context van een gekromde ruimtetijd: om de bron te beschrijven moeten we de ruimtetijd kennen en om de ruimtetijd te kennen moeten we Einsteins vergelijkingen oplossen met bronterm. Om dit probleem op te lossen kiezen we voor enige vrijheid in de definitie van onze bron.

Het formalisme dat gebruikt wordt is het in hoofdstuk zeven geïntroduceerde Newman-Penrose formalisme. In hoofdstuk negen wordt de elektromagnetische Hopf knoop in dit formalisme *in een vlakke ruimtetijd* behandeld. Dit geeft mogelijke aanknopingspunten voor de definitie van de bron in de context van een gekromde ruimtetijd.