Stellingen

behorende bij het proefschrift
Topological aspects of rational points on K3 surfaces
van Rene Pannekoek

1. Stel dat p een priemgetal is en E een elliptische kromme over het lichaam $\mathbb{Q}_p$ van de p-adische getallen. Stel dat E additieve reductie heeft. We geven met $E_0(\mathbb{Q}_p)$ de punten van goede reductie in $E(\mathbb{Q}_p)$ aan. Laat $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6 \in p\mathbb{Z}_p$ zodanig zijn dat $y^2+a_1xy+a_3y = x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$ een minimale Weierstrassvergelijking is voor E. Dan is $E_0(\mathbb{Q}_p)$ isomorf met $\mathbb{Z}_p$, behalve in de volgende vier gevallen: (i) $p = 2$ en $a_1 + a_3 \equiv 2 \pmod 4$; (ii) $p = 3$ en $a_2 \equiv 6 \pmod 9$; (iii) $p = 5$ en $a_4 \equiv 10 \pmod{25}$; (iv) $p = 7$ en $a_6 \equiv 14 \pmod{49}$. In deze vier gevallen is $E_0(\mathbb{Q}_p)$ isomorf met $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2. Laat p een priemgetal zijn. Dan zijn er oneindig veel K3-oppervlakken X over het lichaam $\mathbb{Q}$ van rationale getallen zodanig dat $X(\mathbb{Q})$, de verzameling rationale punten op X, dicht ligt in $X(\mathbb{Q}_p)$, de ruimte van p-adische punten op X beschouwd met de p-adische topologie.

Laat nu p en q twee verschillende priemgetallen zijn, zodanig dat beide groter zijn dan 3. Dan zijn er oneindig veel K3-oppervlakken X over $\mathbb{Q}$ zodanig dat $X(\mathbb{Q})$ dicht ligt in de ruimte $X(\mathbb{Q}_p) \times X(\mathbb{Q}_q) \times X(\mathbb{R})$, beschouwd met de producttopologie.

3. Er bestaat een K3-oppervlak X zodanig dat, voor alle priemgetallen p congruent met 3 modulo 4 en groter dan 7, de rationale punten $X(\mathbb{Q})$ dicht liggen in $X(\mathbb{Q}_p)$.

4. Laat $\mathcal{S}_{5,5}$ de verzameling elliptische krommen over $\mathbb{Q}$ zijn die gegeven worden door de vergelijking $y^2 = x^3 + ax + b$, met a en b beide gehele getallen ongelijk aan nul, zodanig dat $-5 \leq a \leq 5$ en $0 < b \leq 5$. Zij E een element van $\mathcal{S}_{5,5}$ en definieer X als het Kumeroppervlak van $E \times E$, dat wil zeggen dat X gelijk is aan het quotiënt $(E \times E)/\langle -1 \rangle$ opgeblazen in zijn singuliere locus. Stel dat p een priemgetal is groter dan 109 en kleiner dan 2000 zodanig dat E goede reductie heeft bij p. Dan ligt $X(\mathbb{Q})$ dicht in $X(\mathbb{Q}_p)$.

5. Zij S een niet-singulier derdegraads oppervlak over een perfect lichaam k. Neem aan dat S een rationaal punt P bevat dat niet op een lijn van S ligt, alsmede drie paarsgewijs niet-doorsnijdende lijnen L_1, L_2, L_3 waarvan de vereniging gedefinieerd is over k. Definieer een rationale afbeelding $f\colon \mathbb{P}^2_k \dashrightarrow S$ als volgt. We kiezen een isomorfisme tussen $\mathbb{P}^2_k$ en de variëteit van vlakken door P; voor elk punt $Q \in \mathbb{P}^2_k$ noteren we het bijbehorende vlak door P met V_Q. Voor bijna alle Q snijdt het vlak V_Q het oppervlak S in een niet-singuliere kubische kromme C_Q die het rationale punt P bevat. Tevens bevat C_Q, voor i tussen 1

en 3, het punt R_i gegeven door de doorsnijding van L_i met S. Laat $f(Q)$ de som van R_1, R_2 en R_3 op C_Q zijn, voor de groepswet met identiteitselement P. De graad van de aldus gedefinieerde rationale afbeelding f is drie.

6. Laat E de elliptische kromme $y^2 = x^3 + x$ over $\mathbb{Q}$ zijn. Laat N een positief geheel getal zijn en $p > 3$ een priemgetal; we geven met $\widetilde{E}$ de reductie van E modulo p aan. Dan is p gelijk aan $N^2 + 1$ dan en slechts dan als de groep $\widetilde{E}(\mathbb{F}_p)$ isomorf is met $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$.

7. Laat k een lichaam dat eindig voortgebracht is over $\mathbb{Q}$ zijn. Laat A een abelse variëteit over k zijn en X zijn Kummervariëteit, gedefinieerd als $A/\langle -1 \rangle$ opgeblazen in zijn singuliere locus. Laat $\mathrm{Br}(X)$ de Brauergroep van X zijn en $\mathrm{Br}_0(X)$ het beeld van $\mathrm{Br}(k)$ in $\mathrm{Br}(X)$. Dan is $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}_0(X)$ een eindige abelse groep.

Stel nu dat k een getallenlichaam is. We geven dan met $X(\mathbb{A}_k)$ de adelische punten van X aan, en met $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ de adelische punten van X die met elk element van $\mathrm{Br}(X)$ tot 0 paren. Dan is $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ een niet-lege open en gesloten deelverzameling van $X(\mathbb{A}_k)$.

8. Laat k een getallenlichaam zijn. Neem aan dat voor alle abelse variëteiten A over k geldt dat de Brauer–Maninobstructie de enige is tegen zwakke approximatie op de Kummervariëteit X van A, dat wil zeggen dat de verzameling $X(k)$ dicht ligt in $X(\mathbb{A}_k)^{\mathrm{Br}}$. Dan geldt voor elke positief-dimensionale abelse variëteit B over k dat de rangen van kwadratische twists van B onbegrensd zijn.

9. Betogen over de gemeenschappelijke kenmerken van enerzijds wiskunde en anderzijds muziek, schilderkunst en poëzie (hierna *kunst* te noemen) ontspruiten aan een al dan niet oprecht verlangen om de status van de wiskunde te verhogen door te lenen van de status van kunst. Of dit soort betogen inderdaad bevorderlijk zijn voor de status van de wiskunde is de vraag; in elk geval staat vast dat zij schadelijk kunnen zijn voor de status van kunst.

10. De grote combinatorische inventiviteit waarvan zowel de muziek van Bach als de serie *Seinfeld* getuigen is de voornaamste reden dat zij voor wiskundigen interessanter zijn dan de meeste andere uitingen in hun respectievelijke genres.

11. André van Duin is een van de meest onderschatte komieken van de twintigste eeuw.